Matice

Matice jsou obecně dvourozměrná pole (zatímco vektory jsou jednorozměrná pole), jejichž rozměry určujeme jako: počet řádků × počet sloupců. Tato pole označujeme velkými písmeny a jejich prvky odpovídajícími malými písmeny s dolními indexy (např. a_{12} je prvek 1. řádku a 2. sloupce). Například matice A o rozměrech 2×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Základní operace s maticemi

- **Násobení matice skalárem:** Pokud matici A vynásobíme libovolným skalárem (číslem) q, pak prvky výsledné matice $C = qA$ určíme jako: $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{q a_{ij}}$. Například pro čtvercovou matici A platí: $qA = \begin{pmatrix} qa_{11} & qa_{12} \\ qa_{21} & qa_{22} \end{pmatrix}$.
- **Sčítání matic:** *Matice je možné sčítat, pokud mají stejné rozměry*. Je-li tato podmínka splněna, pak prvky výsledné matice $C = A + B$ určíme jako $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$. Například pro součet dvou čtvercových matic A a B platí: $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$.
- **Násobení matic:** *Uvažujme matici A o rozměrech $m \times n$, pak tuto matici je možné násobit pouze maticí B o rozměru $n \times p$, kde p je libovolné nenulové přirozené číslo, ale n musí nabývat stejné hodnoty jako druhý rozměr matice A*. Matice, která vznikne tímto součinem bude mít rozměr $m \times p$. Pro prvky výsledné matice $C = AB$ platí tento zdánlivě komplikovaný vztah: $\boldsymbol{c_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_{ik} b_{kj}}$, jehož význam přibližuje obrázek níže:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \\ \boxed{b_{31}} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11}} + \boxed{a_{12}b_{21}} + \boxed{a_{13}b_{31}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{b_{12}} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \boxed{a_{11}b_{12}} + \boxed{a_{12}b_{22}} + \boxed{a_{13}b_{32}} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \\ \boxed{b_{31}} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ \boxed{a_{21}b_{11}} + \boxed{a_{22}b_{21}} + \boxed{a_{23}b_{31}} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{b_{12}} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \boxed{a_{21}b_{12}} + \boxed{a_{22}b_{22}} + \boxed{a_{23}b_{32}} \end{pmatrix}$$

- **Součin matice a vektoru:** *Pro součin matice a vektoru platí stejné pravidlo, jako pro násobení matic* – řádkový vektor o n prvcích je prakticky matice o rozměrech $1 \times n$, zatímco sloupcový vektor o n prvcích je matice o rozměrech $n \times 1$. Například: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \end{pmatrix}$.

Pokročilejší operace s maticemi

- **Stopa matice (trace):** Stopou matice myslíme součet prvků na diagonále čtvercové matice: $\mathbf{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{ii}}$. Například: tr $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$.
- Transpozice matice: Provedeme-li transpozici na matici A získáme matici, která bude mít oproti matici A prohozené řádky a sloupce. Pro prvky výsledné matice $C = A^{\mathrm{T}}$ platí: $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ji}}$. Například: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.